

代数 I

日拱一卒讲义

作者：锦汤匙王子

组织：数学练习生第二期

时间：Sep 7, 2022

版本：0.02

不要摸鱼, 不要摸鱼, 不要摸鱼

题图：数学实践



关于讲义

数学是许多理工科的基础. 然而, 正因为如此, 在笔者最近几年的数学学习中, 严重地呈现出了”以解决问题为导向””能跑就行, 要什么自行车”的趋势. 这无可厚非, 甚至高效, 但对于一个数学爱好者, 这是一件并不太好接受的事. 适逢 Maki's 招募第二期数学练习生, 希望能借此机会, 静下心来日拱一卒, 把零碎的知识连成整体, 扎实数学基础.

本讲义的内容严重受限于本人的数学知识范围, 如有错误, 欢迎指正. 本讲义的章节结构主要参考了代数学引论 (第一卷), 但笔记中的内容参考的教材范围要更广一些.

目录

第1章 在矩阵之前	1
第2章 在矩阵之前	2
第3章 矩阵	3
第4章 行列式	4
第5章 群, 环, 域	5
第6章 复数和多项式	6
第7章 多项式的根	7

第1章 在矩阵之前

什么是代数呢?

(这是一段写在开始编写代数学笔记前的话,这段话很可能随着不断学习而发生变化. 关于什么是代数,这个问题我至今还是没有特别深刻的理解,直觉上的感受是在研究一些具体数学问题的过程中,发现不要局限在确定取值的情况下研究问题能够得到更加深刻的结论,甚至有的时候给出更加简单的解答. 此处必须要引用 <代数学引论 (第一卷) > 中的一个典型问题,这是我最初见过的,让我感受到代数学强大力量的例子.)

问题 1.1 平板受热问题 带有三个孔的矩形平板 (见图 1) 被当作一种奇妙装置的阀门,以便得到低温. 阀门由正方形方格构成的一个网覆盖着. 位于网的四条边界上的正方形顶点成为边界点,而其它的顶点叫做内点. 测量表明,当加热或冷却时,任一内点的温度是它相邻的四个顶点 (内点或边界点) 温度值的算术平均. 我们希望边界点的温度取图 3 所示的值. 这是可能的吗? 如果可能,试问内点的温度分布是不是唯一确定的?

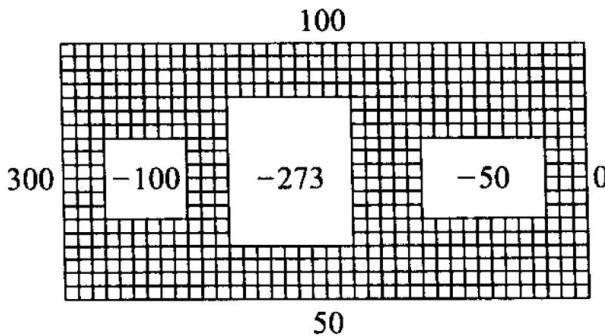


图 1.1

我们可以很容易地根据这个问题列出一组线性方程,并且意识到求解这个问题等价于这组线性方程组是否有解,并且它的解是不是唯一的. 然而,如果我们企图使用中学的方式去找到解的解析表达式,并且通过对表达式的分析来判断这个方程是否存在解以及解的个数,那么将是一场灾难. 也许足够的耐心可以做到这一点. 但幸运的是,在后文中,我们将会看到,以代数的方式看待这个问题的整体,而不是囿于具体的数值,将会让这个问题豁然开朗.

第 2 章 在矩阵之前

第3章 矩阵

第4章 行列式

第 5 章 群, 环, 域

第6章 复数和多项式

第7章 多项式的根